Exercices de colle
ECG1

Geoffrey Deperle

Table des matières

1 Logique, raisonnements et équations

1.1 Raisonnement par récurrence

1.1.1 Suites définies par récurrence

Exercice 1. Soit a un réel strictement supérieur à 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \quad \text{ et } u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{1}{u_n - 1}$$

1. Prouver que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1} \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.

Exercice 3. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 2$.

1.1.2 Raisonnements théoriques

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

Exercice 5. On se donne une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Par récurrence sur n, montrer $m \geq n \implies f(m) \geq n$ (en particulier $f(n) \geq n$).
2. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f(n) < n+1$ pour tout n, et en déduire l'unique solution f du problème.

1.2 Équations, inéquations

Exercice 6. Résoudre $|x^2 + 3x - 4| = |x^2 + 2x - 1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Exercice 7. Trouver les réels $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $e^{a+b} = e^a + e^b$

Exercice 8. Soit p un paramètre réel.
Résoudre l'équation (E_p) : $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

Exercice 9. Soit $m \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = m$$

Exercice 10. Soit $m \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x^2 + mx - 1} = -x + 3m$$

2 Calcul algébrique

2.1 Calculs de somme

Exercice 11. Calculer la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$

Exercice 12. Soit $n \geq 2$, calculer par deux méthodes

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

Indication : La première méthode pourra consister à étudier la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$ et la seconde utilisera l'identité (à démontrer) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 13. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

Indication : On pourra calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - k^5$.

Exercice 14. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

Indication : On pourra faire des "paquets" sur les différentes valeurs de $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$U_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

2.2 Calcul de produit

Exercice 19. Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

2.3 Autres calculs algébriques

Exercice 20. Simplifier

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7-5\sqrt{2}}$$

3 Fonctions usuelles

3.1 Étude de fonctions

Exercice 21. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) - x$.

1. Indiquer le domaine définition de u.
2. Soit $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, montrons que u est dérivable et montrer que $\forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$ où P est une fonction polynomiale à préciser.
3. Étudier les variations de u sur I.

Exercice 22. Montrer que, pour tout $x > 0$ (et $x \neq 1$), on a l'inégalité

$$\frac{x\ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

Exercice 23.
1. Étudier (domaine de définition, variations, limites, courbe) la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 24. On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ? Préciser les limites de f aux bornes de son domaine définition.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 25. On considère la fonction f définie par $f(x) = \exp(\sqrt{x^2-1})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Expliciter le sens de variations de f, y compris ses limites aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 26. Considérons l'application $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

1. Étudier (domaine de définition, de dérivabilité, variations, limites) la fonction f
2. Montrer que f admet une asymptote oblique d'équation $y = x-1$ lorsque $x \to +\infty$.
3. Tracer l'allure de la courbe de f

Exercice 27. Considérons l'application $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

1. Étudier (domaine de définition, de dérivabilité, variations, limites) la fonction f
2. Montrer que f admet une asymptote oblique d'équation $y = x+\frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.
3. Tracer l'allure de la courbe de f

3.2 Fonctions trigonométriques

Exercice 28. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$$

Exercice 29. Discuter selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ de l'existence de solutions à l'équation

$$3\sin(x) + m\cos(x) - 5 = 0$$

Exercice 30. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan(x) = \cos(x)$. Que vaut $\sin(x)$?

4 Suites numériques

4.1 Suites récurrentes linéaires

Exercice 31. Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

— Donner une forme explicite de (F_n)

— Déterminer lim $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

Exercice 32. Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} & u_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} \end{cases}$$

Exercice 33. Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} & u_0 = 1, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & 4u_{n+1} = 4u_n - u_{n+2} \end{cases}$$

Exercice 34. Donner une forme explicite et la limite de la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{8 + \dfrac{u_n^2}{2}}$.

Indication : On pourra poser $v_n = u_n^2$.

Exercice 35. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ définie sur $[0, 2]$, ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe deux suites (p_n), (q_n) d'entiers non nuls tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.
2. Déterminer une expression explicite de (p_n) et (q_n). En déduire une expression explicite de (u_n).
3. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4.2 Calcul de limite de suites explicites

Exercice 36. Calculer la limite de (u_n) de terme générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 37. Calculer la limite de (u_n) de terme générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Exercice 38. Soit $a > 0$ calculer la limite de (u_n) de terme générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}\right)$$

4.3 Suites définies par récurrence

Exercice 39. Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \ln(x) + 2 - x$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. En déduire la monotonie de (u_n) en fonction de u_0.
3. Montrer que (u_n) converge et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 40. Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x} - x^2$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \leq -1$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 41. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ définie sur $[0, 2]$, ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.
2. Montrer que f admet un unique point fixe noté α à déterminer.
3. Démontrer que (u_{2n+1}) est décroissante et majorée par α et que la suite (u_{2n}) est croissante et minorée par α.
4. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et déterminer leurs limites.
5. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 42. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$.
2. En déduire la monotonie de (u_n) en fonction de u_0
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 43. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - x$.
2. En déduire la monotonie de (u_n) en fonction de u_0
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 44. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in]0, 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite est monotone.
3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

4.4 Suites adjacentes

Exercice 45. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 46. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5 Ensembles et applications

5.1 Injectivité, Surjectivité

Exercice 47. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 48. Soit E un ensemble et deux parties A, B de E. On définit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cup B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 49. Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.

Exercice 50. Soit E un ensemble $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 51. Soit $f : E \to F$, montrer que f est surjective si et seulement si pour tout ensemble G et toute fonction $h, g : F \to G$, $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Indication : Pour le sens réciproque on pourra considérer $G = \{0, 1\}$.

5.2 Calcul de réciproque

Exercice 52. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Déterminer la réciproque de f.

Exercice 53. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Déterminer la réciproque de f.

Exercice 54. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Déterminer la réciproque de f.

6 Dénombrement

6.1 Dénombrement appliqué

Exercice 55. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, combien y a t'il de surjections de $\{1, \dots, n+1\}$ sur $\{1, \dots, n\}$?

Exercice 56. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Soit $p \in [\![1, n]\!]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.
2. Soit d_n le nombre de bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ qui n'admet pas de point fixe. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$ (en posant $d_0 = 1$).
3. Montrer que $d_n = n! \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$.

Exercice 57. On dispose de n points disticts dans le plan.

1. Soit $p \leq n$. Combien y a t'il de polygone à p cotés que l'on peut construire avec ces n points.
2. On fixe un polygone convexe à p cotés, combien ce polygone a t'il de diagonale ?

Exercice 58. On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t'il de chemins possibles ?

6.2 Calcul de cardinal

Exercice 59. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 60. Soit E un ensemble à n éléments. Montrer que E contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. En déduire l'identité :

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}$$

Exercice 61. Soit E un ensemble à n éléments

1. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A \cap B)$
   Indication : On pourra décomposer la somme selon le cardinal de $A \cap B$.
2. (a) Montrer que $X \mapsto \overline{X}$ est une bijection.
   (b) En déduire une valeur de $4S_n$. En déduire la formule trouvé en 1).
3. En déduire en utilisant les formules de De Morgan la valeur de

$$\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A \cup B)$$

7 Probabilités avec univers fini

7.1 Probabilités par dénombrement

Exercice 62. Une colonie de n chauve-souris a élu domicile dans une grotte, et des scientifiques souhaitent estimer la taille de la colonie. Pour cela, ils en capturent 10, leur passent une bague de marquage, puis les relâchent. La nuit suivante, ils en capturent à nouveau 10 au hasard. Trois d'entre elles sont déjà porteuses d'une bague.

1. Calculer la probabilité p_n qu'on trouve trois chauve-souris porteuses d'une bague lorsque l'on en capture 10 au hasard dans une population de n chauve-souris dont 10 déjà marquées.
2. Étudier la monotonie de (p_n). En déduire la valeur de n telle que p_n est maximale.

Exercice 63. Soit $n \geq 1$. On lance $6n$ dés équilibrés. Quelle est la probabilité que chaque numéro de $[\![1, 6]\!]$ apparaisse n fois ?

7.2 Probabilités conditionnelles

Exercice 64. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtenit n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n pour ce dé soit pipé. Interpréter le résultat.

Exercice 65. On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 66. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouve k boules blanches et $n - k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.
2. Quelle est la probabilité que l'urne choisit soit l'urne k sachant que les deux boules sont blanches.

7.3 Formule des probabilités totales

Exercice 67. Un ascenseur en état de marche à l'instant $t = 0$ peut ensuite tomber en panne selon les conditions suivantes :

— Si l'ascenseur est en état de marché à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $n + 1$ vaut $p \in]0, 1[$

— Si l'ascenseur est en panne à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il soit encore en panne à l'instant $n + 1$ vaut $q \in]0, 1[$.

Déterminer la probabilité que l'ascenseur fonctionne à l'instant n, et la limite de cette probabilité lorsque n tend $+\infty$.

Exercice 68. Soit N un entier strictement positif et p un réel strictement compris entre 0 et 1. Une particule se deplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite. A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants. Initialement, la particule est en $n \in [\![0, N]\!]$ et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N. On note q_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1. (a) Justifier que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.
   (b) Montrer que pour tout n tel que $1 \leq n \leq N - 1$, on a
   $$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$$
   (c) En déduire une expression de q_n en fonction de n, N, p et q. (On distinguera les cas $p = \frac{1}{2}$ et $p \neq \frac{1}{2}$).
2. Calculer de même la probabilité p_n que la particule s'arrête en N.
3. Calculer $p_n + q_n$ et en déduire la probabilité que la particule ne s'arrête jamais.

Exercice 69. On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche". On pose également $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

7.4 Exercices théoriques

Exercice 70. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots A_n) \leq \min_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i)$$

Exercice 71. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisé, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités. On définit $\mathrm{d}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}})$ par
$$\mathrm{d}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}) = \max_{A\subset\Omega}\{|\mathbb{P}(A) - \widetilde{\mathbb{P}}(A)|\}$$

1. Montrer que $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}}$ si et seulement si $\mathrm{d}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}) = 0$
2. Soit $B = \{\omega \in \Omega, \mathbb{P}(A) \geq \widetilde{\mathbb{P}}(A)\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(B) - \widetilde{\mathbb{P}}(B) \leq \mathrm{d}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}})$.
   (b) Soit $A \in \Omega$, montrer que $\mathbb{P}(A) - \widetilde{\mathbb{P}}(A) \leq \mathbb{P}(B) - \widetilde{\mathbb{P}}(B)$ (On pourra décomposer A avec les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$).

(c) Montrer que $|\mathbb{P}(A) - \widetilde{\mathbb{P}}(A)| \leq \mathbb{P}(B) - \widetilde{\mathbb{P}}(B)$. En déduire que $\mathrm{d}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}) = \mathbb{P}(B) - \widetilde{\mathbb{P}}(B)$

Exercice 72. Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 73. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \Omega$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq -(1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))$
3. En déduire $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$

8 Variables aléatoires finies

8.1 Détermination de loi, espérance, variance

Exercice 74. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotés de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience suivante : on choisir d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Pour $i, k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(Y = k|X = i)$. En déduire la loi de Y.
3. Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 75. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y. Déterminer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 76. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boite formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiment restés vide.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X]$.

Exercice 77. On se donne une urne avec N boules numérotées de 1 à N. On tire les boules une à une sans remise et on s'arrête quand la boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à la précédente. Soit X le nombre de tirages effectués.

1. Pour $k \in [\![1, N]]$, déterminer $\mathbb{P}(X \geq k)$. En déduire la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 78. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules ($n \in [\![1, N]\!]$). On note X (respectivement Y) le plus petit (respectivement le plus grand) des nombres obtenus.
On considère dans cette question que le tirage s'effectue avec remise.

1. Soit $x \in [\![1, N]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$. En déduire la loi de X.
2. Soit Soit $y \in [\![1, N]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq x)$. En déduire la loi de Y.

Exercice 79. Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient 2 boules colorées et $n - 2$ boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1 égale au numéro du tirage de la première boule colorée et calculer son espérance.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 égale au numéro du tirage de la seconde boule colorée.

Exercice 80. Soit n un entier naturel non nul. Un archer dispose de n flèches dans son carquois.
A chaque tir, il atteint sa cible avec une probabilité $p \in]0,1[$. Il arrête de tirer dès qu'il a atteint sa cible ou qu'il n'a plus de flèche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de flèches utilisées.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
2. Calculer la probabilité que l'archer tire $k \in [\![1,n]\!]$ flèches sachant qu'il a atteint sa cible.

Exercice 81. 1. Soit $n \leq p$, montrer que $\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier. Une urne contient n boules blanches et n boules colorées. On tire toutes les boules successivement et sans remise.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X indiquant le rang de la dernière boule colorée tirée.

8.2 Loi binomiale

Exercice 82. Un candidat n'ayant pas révisé répond au hasard à un QCM comportant 20 questions et k réponses possibles à chaque question, un seule étant correcte. Le candidat obtient un point par bonne réponse et 0 pour une mauvaise.

1. Donner la loi du nombre de points obtenus.
2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, le professeur lui permet de choisir à nouveau une des $k-1$ réponses restantes, et le candidat obtient $\frac{1}{2}$ point pour chaque nouvelle bonne réponse. On note Y_2 le nombre de bonnes réponses lors du second passage.
   (a) Soit $j \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que l'élève donne j bonnes réponses lors du deuxième passage sachant qu'il en a donné i lors du premier.
   (b) Pour $j \in [\![1, 20-i]\!]$, montrer que
   $$\binom{20}{i}\binom{20-i}{j} = \binom{20}{j}\binom{20-j}{i}$$
   (c) En déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (d) Calculer l'espérance du nombre de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat puisse espérer avoir une note supérieure ou égale à 5.

Exercice 83. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 84. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y] \geq \mathbb{E}[X]$. Aurait-on pu deviner ce résultat ?

9 Limites, continuité,

9.1 Calcul de limite de fonctions

Exercice 85. Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

Exercice 86. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

Exercice 87. Calculer $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$

10 Dérivabilité, accroissements finis

10.1 Classe C^1

Exercice 88. Déterminer a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 89. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(1 + \frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 90. Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$? soit C^1 sur $\mathbb{R}$?

10.2 Inégalité des accroissements finis

Exercice 91. On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f la suite définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$ et montrer que I est stable par f.
2. Démontrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
3. Démontrer que pour tout $x \in I$,
$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$
4. Démontrer que (u_n) converge vers γ.

Exercice 92. On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f la suite définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

1. Montrer que $[0, 1]$ est stable par f.
2. Démontrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
3. Démontrer que pour tout $x \in I$,
$$|f'(x)| \leq \frac{2e}{9}$$
4. Démontrer que (u_n) converge vers γ.

10.3 Théorème de Rolle

Exercice 93. Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $e^x - P(x) = 0$ d'inconnue x n'a qu'un nombre fini de solution.

Exercice 94. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que la tangente de f au point c passe par l'origine.

Exercice 95. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et tendant vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 96. En considérant

$$F : \begin{array}{ccc} [\arctan(a), \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } a \neq \frac{\pi}{2} \\ f(a) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

re-démontrer le résultat de l'exercice précédent.

10.4 Égalité des accroissements finis

Exercice 97. Soit f continue sur $[0, 1]$ dérivable sur $]0, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des éléments distincts $0 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n$.
2. Montrer qu'il existe $0 < y_0 < \cdots < y_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f'(y_k)} = n$

11 Intégration sur un segment

11.1 Calcul de primitives

11.1.1 Intégration par parties

Exercice 98. Donner l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x^2 \arctan(x)$.

11.1.2 Changement de variables

Exercice 99. Donner l'ensemble des primitives de

$$x \mapsto \frac{2e^{3x}}{1+e^{2x}}$$

(On pourra effectuer le changement de variable $u = e^x$)

Exercice 100. Donner l'ensemble des primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x}}$$

(On pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{x}$)

11.1.3 Intégration de fonctions rationnelles

Exercice 101. Déterminer l'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

Exercice 102. Trouver a, b, c trois réels tels que pour tout x distincts de $2, 3, 4$ on ait

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-4}$$

et en déduire une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

11.1.4 Calcul astucieux

Exercice 103. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$$

11.2 Suites d'intégrales

Exercice 104. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

Exercice 105. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \,\mathrm{d}t$$

1. Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
2. Donner une expression explicite de $I_{p,q}$.

Exercice 106. Soit n un entier naturel, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0, I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{k}$$

Exercice 107. Pour $n \geq 1$, on définit $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)^n \,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_1.
2. Étudier la monotonie de (I_n). En déduire que (I_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

11.3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 108. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f. (Pour les limites, on pourra montrer d'abord que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \geq 1$)

Exercice 109. Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner les variations de f.

Exercice 110. On définit la fonction f sur $[0,1]$ par

$$f(0)=0, f(1)=\ln(2) \text{ et } \forall x\in]0,1[,\ f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

1. Montrer que f est bien définie sur $[0,1]$.
2. Pour tout $x\in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$
3. En déduire que pour tout $x\in]0,1[$, $x^2\ln(2)\leq f(x)\leq x\ln(2)$.
4. En déduire que f est continue sur $[0,1]$.
5. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et déterminer ses variations.

11.4 Sommes de Riemann

Exercice 111. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 112. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

11.5 Formules de Taylor

Exercice 113. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ à l'ordre 3. Déterminer une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 114. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$0\leq\mathrm{ch}(x)-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\leq\frac{x^5}{120}\mathrm{ch}'(x)$$

Exercice 115. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\leq1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

12 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 116. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z, t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} 3x + 2z & = 0 \\ 3y + z + 3t & = 0 \\ x + y + z + t & = 0 \\ 2x - y + z - t & = 0 \end{cases}$$

Exercice 117. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z, t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ x + 3y - 2z + 2t & = 0 \\ -2y + 3z - t & = 0 \\ 2x + 5z + t & = 0 \end{cases}$$

Exercice 118. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z & = -4 \\ x + 2y - 3z & = 6 \\ 7x + 4y - z & = 22 \end{cases}$$

13 Calcul matriciel

13.1 Inversion de matrices

Exercice 119. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}. En déduire les solutions du système $\begin{cases} x - z & = m \\ -2x + 3y + 4z & = 1 \\ y + z & = 2m \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 120. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.En déduire les solutions du système $\begin{cases} x + 2y + z & = 1 \\ x + 2y - z & = 2m \\ -2x - 2y - z & = m \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 121. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
En déduire les solutions du système $\begin{cases} x - y + 2z & = 2m \\ -x + 2y - z & = m \\ -x + y - z & = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

13.2 Calcul de puissance

Exercice 122. Soit $a \neq 0$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La formule fonctionne-t-elle pour n négatif ?

13.3 Exercices théoriques

Exercice 123. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que T commute avec sa transposée si et seulement si la matrice T est diagonale.

Exercice 124.
1. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_2$.
2. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = B$.

14 Polynomes

14.1 Factorisation de polynômes

Exercice 125. Factoriser le polynôme $X^5 - 3X^4 - 5X^3 + 27X^2 - 32X + 12$.

Exercice 126. Factoriser le polynôme $2X^5 - 8X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 8X - 8$

Exercice 127. Factoriser le polynôme $X^5 - 2X^4 - X^3 + 5X^2 - 3$

14.2 Exercices théoriques

Exercice 128. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 129. Soit E l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X - 4)$.
Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R}_2[X] \to E$ tel que $\forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \psi(Q) = WQ$ est une bijection.

15 Espaces vectoriels

15.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 130. Soit $F = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + xy'(x) - x^2 y(x) = 0\}$.
Montrer que F est un espace vectoriel.

15.2 Famille libre / génératrice

Exercice 131. Soit $u = (1, 3, 4, 5), v = (2, 1, 5, 6), w = (4, 7, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$.
Montrer que la famille (u, v, w) forme une famille libre.

Exercice 132. Soit $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Vect}(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 133. Soit E un espace vectoriel et $(e_1, e_2, e_3,)$ une famille libre de E.
Montrer que $(e_1, 2e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ est libre.

Exercice 134. Soit $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$. On pose pour $k \in [\![0, n]\!], P_k = (X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k}$.
Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

Application : Montrer que $(X^2, X(X - 4), (X - 4)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer les coordonnées de $2X^2 + 32$ dans cette base.

Exercice 135. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on appelle valuation de P noté $\mathrm{val}(P)$ le plus petit exposant apparaissant dans la forme réduite de P. Par exemple : $\mathrm{val}(X^2 + 4X) = 1$

1. Montrer que toute famille de polynômes non nuls de valuation deux à deux distinctes est libre.
2. Montrer que $(X^2, X^2 + X, X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et décomposer $X^2 + 2X + 2$ dans cette base.

Exercice 136. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour $k = 1, \ldots, n - 1$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$. Étudier l'indépendance linéaire de la famille $(w_1, \ldots, w_n)$.
Indication : On pourra commencer par le cas $n = 2$ et $n = 3$.
Application : Montrer que $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de $X^2 + 2X + 2$ dans cette base.

15.2.1 Sommes d'espaces vectoriels

Exercice 137. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}$.
Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 138. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant et $F = \{P \in \mathbb{R}[X], A|P\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire de F.

16 Applications linéaires

16.1 Exercices pratiques

Exercice 139. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X).$$

1. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.
3. Déterminer le noyau de Δ.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

.

5. En déduire que si $\deg P < n$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0$$

Exercice 140. On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] | P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.
   Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.
2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomoprhisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de E.
3. En déduire une base de E.

Exercice 141. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 142. Soit P un polynôme de degré n. Soit φ l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ & & Q & \mapsto & R \end{array}$$

où R est le reste de la division euclidienne de X^2Q par P.
Montrer que φ est linéaire.

Exercice 143. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 144. On considère l'application T définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.
3. T est-elle injective ? surjective ?

16.2 Exercices théoriques

Exercice 145. Soit E, F deux espaces vectoriels et G un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \,|\, G \subset \mathrm{Ker} u\}$$

Montrer que A est un espace vectoriel.

Exercice 146. Soit u un endomorphisme de E. Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs non nuls de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ il existe λ_i tel que $u(x_i) = \lambda_i x_i$.
Montrer que si les λ_i sont deux à deux distincts alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
Indication : On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 147. Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Posons

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(F,G) \\ & & f & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire.
Supposons que g est injective. Que peut-on dire φ ?

Exercice 148. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et expliciter les projections associées.

Exercice 149. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Im} u$
2. $u^2 = 0$ et il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{id}$

Exercice 150. Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = \mathrm{id}_E$.
Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$$

Exercice 151. Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 5u + 6\mathrm{id} = 0$.

1. Montrer que u est un automorphisme et exprimer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$.
   Indication : On pourra remarquer que $(u - 2\mathrm{id}) - (u - 3\mathrm{id}) = \mathrm{id}$

16.3 Projecteurs

Exercice 152. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Démontrer que u commute avec p si et seulement si $u(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $u(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 153. Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{id} - p$ et on considère

$$L = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\} \text{ et } M = \{g \in \mathcal{L}(E), \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}$$

Montrons que L et M sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

17 Développements limités

17.1 Calcul de développement limité

Exercice 154. Donner un développement limité à l'ordre 5 de $x \mapsto \cos(x)\ln(1-x^2)$

Exercice 155. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \exp(x-x^2)$

Exercice 156. Donner un développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto \sin(x)e^x\cos(x)$.

17.2 Analyse asymptotique

Exercice 157. Soit $n \geq 1$,

1. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = \mathrm{o}(x_n)$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. En étudiant $\alpha_n = x_n - n$. Montrer que x_n admet le développement asymptotique à deux termes :
$$x_n = n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$$
5. En étudiant $\beta_n = x_n - n + \ln(n)$. Montrer que x_n admet un développement asymptotique à trois termes :
$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 158. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on note u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln(n)$, montrer que
$$u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 159. Montrer que l'équation $\tan(x) = \sqrt{x}$ possède une unique solution x_n sur chaque intervalle $I_n =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+n\pi$.
Donner un développement asymptotique à quatre termes de x_n.

17.3 Étude d'asymptotes

Exercice 160. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\ln(e^x+e^{-x})}{x^2}\right)$ admet une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$. (On précisera les positions relatives).

Exercice 161. Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x^2+5x+4)e^{\frac{1}{x+3}}$ admet une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$. (On précisera les positions relatives).

Exercice 162. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^5 e^{\frac{2}{x}}}{(x-1)^4}$ admet une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$. (On précisera les positions relatives).

18 Séries numériques

18.1 Étude de convergence

Exercice 163. Donner la nature de la série $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)^{n^4}$

Exercice 164. Donner la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

Exercice 165. Donner la nature de la série $\sum 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$

18.2 Séries de Bertrand

Exercice 166. Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k^3\ln(k)}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}$

Exercice 167. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(n\ln(n!))^2}}$

Exercice 168. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\sin(\frac{1}{n})}{(\ln(n^2+n))^2}$

18.3 Calcul de somme

Exercice 169. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 170. Donner la nature et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$

Exercice 171. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge et calculer sa somme avec $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

Indication : On pourra commencer par déterminer a, b, c tel que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ et utiliser le développement asymptotique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exercice 172. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que la série $\sum_k \ln(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right))$ converge et calculer sa somme. Indication : On pourra utiliser la formule $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

Exercice 173. Donner la nature et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$

19 Dimension d'un espace vectoriel

19.1 Détermination de dimension

Exercice 174. Soit $n \geq 1$, on pose $H = \{P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mid \int_1^4 P(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension et donner une base de H.

Exercice 175. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}((1,2,-1,1),(-3,-2,3,2),(-1,0,1,1),(2,3,-2,1))$$

Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 176. Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision du segment $[0,1]$. On note E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle à $[x_i, x_{i+1}]$ est affine. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et calculer sa dimension. On pourra commencer par faire un dessin.

Exercice 177. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique si toutes les sommes des termes de ses lignes et de ses colonnes sont égales. Montrer que l'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

19.2 Décomposition en somme directe

Exercice 178. Soient F et G deux espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 179. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid W \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Exprimer la dimension de $\mathcal{A}$ en fonctions des dimensions de E, F, W.

Exercice 180. Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$. Expliciter les projections associées.

19.3 Applications linéaires en dimension finie : théorie

Exercice 181. Soit f un endomorphisme non nul d'un espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
2. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id})) \geq 1$ et montrer que si $x \in \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}) \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id})$.
3. Supposons que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id})) = 2$, déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 182. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$. Supposons que f n'est pas injective.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ est distinct de $\{0\}$.
   Soit x tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrer l'existence d'un tel vecteur x et montrer que $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})) = 2$.
4. Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 183. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ une application linéaire vérifiant $u^2 + u + \mathrm{id} = 0$.

1. Montrer que u est bijectif et déterminer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que pour tout vecteur non nul x, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2.
3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 184. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$ et f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 - 2f + \mathrm{id}_E = 0$$

1. Montrer que f est bijectif et calculer f^{-1}.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
3. Dans cette question, on suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) = n - 1$
   (a) Justifier l'existence d'un x de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ non nul.
   On se donne alors $a \in E$ tel que $f(a) - a = x$.
   (b) Montrer qu'il existe des vecteurs $e_2, \ldots, e_{n-1}$ tels que la famille $(x, e_2, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
   (c) Montrer que $\mathcal{B} = (x, e_2, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de E et donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 185. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$

1. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 186. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ définie par $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ si $i \leq j$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
Indication : Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$.

19.4 Applications linéaires en dimension finie : applications

Exercice 187. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

2. f est-il surjectif ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 188. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z)$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et calculer sa dimension.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 189. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit f l'application linéaire de E dans E par

$$f(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 190. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 191. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$f_1 = (1, -2, 0), f_2 = (-1, 2, 0), f_3 = (0, 0, 2)$$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ telle que $\forall i \in [\![1, 3]\!], u(e_i) = f_i$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que $u - \mathrm{id}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 192. Soit φ défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\mathrm{id})$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X + 1)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 193. On considère l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $u_1 = (1, 0, -2)$. Montrer que $u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer une base (u_2, u_3) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$
3. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Calculer D^2. Que peut-on en déduire sur $f \circ f$? Sur A^2 ?

Exercice 194. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas $n = 3$, donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Généraliser dans le cas n quelconque.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 195. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$?

Exercice 196. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, $\varphi : P \mapsto P + P'$.

1. Donner la matrice de l'endomorphisme de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire le rang de l'endomorphisme. Existe-t'il un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$? L'expliciter dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et calculer $\varphi^{-1}(X^3 + X + 2)$
3. En observant $\varphi^2, \varphi^3, \dots$ trouver une expression polynômiale annulant φ et retrouver les résultats ci-dessus.
4. Donner l'expression de la matrice de φ dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$.

Exercice 197. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynôme définie par $P_0 = 1$ et pour $k \geq 1, P_k(X) = \frac{1}{k!} X (X-k)^{k-1}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Montrer que pour $k \geq 1, P_k'(X) = P_{k-1}(X-1)$.
   (b) Montrer que pour $0 \leq n \leq k, P_k^{(n)}(X) = P_{k-n}(X-n)$.
3. Notons u_n l'application définie pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(Q) = Q - Q'$.
   (a) Montrer que u_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser la matrice de u_n dans $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que u_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer u_n^{-1}.

20 Variables aléatoires discrètes

20.1 Loi de Poisson

Exercice 198. Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attractions suit une loi de Poisson de paramètre 1000. Le parc dispose de dix entrées choisies par chaque visiteurs de manière équiprobable. Donner la loi du nombre de visiteurs prenant la première entrée, son espérance et variance.

Exercice 199. Le nombre N de blessés arrivant aux urgences médicales un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 6, où l'on suppose les victimes réparties uniformément entre les deux genres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de femmes qui figurent parmi les blessés ce jour là, et Y le nombre d'homme.
Déterminer les lois de probabilités de X et Y. Préciser ensuite les espérances mathématiques et les variances.

Exercice 200. On suppose que dans une population d'insectes, le nombre d'oeufs pondus par un insecte au cours d'une ponte est une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On suppose que chacun de ces oeufs, indépendamment des autres, éclot avec une probabilité égale à $p \in]0,1[$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'insectes issus de cette ponte.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Au bout de la seconde génération, combien il y a t'il en moyenne d'insectes (en comptant ceux la population initiale et le nombre d'insectes issus de la ponte).

Exercice 201. Le joueur A et le joueur B jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel X au hasard en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, alors le joueur A gagne et reçoit X euros de la part du joueur B. Si X est pair, alors le joueur B gagne et reçoit X euros de la part du joueur A.
Si $X = 0$ alors la partie est nulle. On note p la probabilité que le joueur A gagne, ainsi que q que le joueur B gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

20.2 Loi Géométrique

Exercice 202. Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant pile avec probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : Si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotés de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule dans cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y

Exercice 203. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi donnée par $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ où $p \in]0,1[$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 204. Soient A_1, A_2, A_3 trois personnes venant dans cet ordre déposer une lettre à la poste dans laquelle il y a deux guichets. A_3 doit attendre que A_1 et A_2 aient fini. Soient X_1, X_2 et X_3 les temps d'attente respectives au guichet des visiteurs et elles suivent toutes une loi géométrique de paramètre p.
Soit Y le temps d'attente de A_3 avant d'accéder au guichet.
Soit Z le temps total passé par A_3 (le temps d'attente pour accéder au guichet et le temps passé au guichet).

1. Déterminer la loi de Y (on calculera d'abord $\mathbb{P}(Y > k)$).
2. Écrire Z en fonction de Y et X_3 puis déterminer la loi de Z.
3. Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

Exercice 205. Soit $n \geq 3$, n personnes jettent simultanément une pièce équilibré. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X le nombre de parties nécessaire à l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X, en déduire que X admet une variance et une espérance que l'on déterminera.

Exercice 206. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien aroosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

20.3 Autres exercices

Exercice 207. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune loi géométrique de paramètre respectifs p_1 et p_2. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 208. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} X & X+Y-1 \\ 0 & Y-1 \end{pmatrix}$.
Déterminer la loi $\mathrm{rg}(A)$.